Dossier n°22 : Exemples d'étude de configurations faisant l'objet de constructions géométriques à la règle et au compas.

Rédigée par Cécile COURTOIS, le 25 juillet 2003.
Cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

Les élèves sont habitués à l'étude et à la construction de configurations tout au long de leur scolarité.

En particulier, au collège, en classe de cinquième et de quatrième, l'étude des triangles conduit à la construction de triangles satisfaisant à des conditions géométriques données.

Ensuite, au lycée, l'introduction de nouveaux outils géométriques va permettre la construction de configurations plus complexes ou satisfaisant à des conditions plus complexes.

Je choisis donc de situer ce dossier en fin de collège et au niveau du lycée.

II Commentaires généraux.

II.1 A propos du sujet.

Dans l'enseignement du second degré, en géométrie, on est amené à étudier diverses configurations.

Une situation géométrique étant décrite à travers un texte ou parfois un schéma, il convient que les élèves puissent à leur tour faire une construction de cette configuration (pour en avoir une représentation correcte dans le premier cas, ou pour éventuellement la compléter).

D'autre part, les élèves choisissent le plus souvent les solutions de facilité en employant une équerre ou un rapporteur qui sont des outils bien moins précis que la règle non graduée et le compas.

L'objectif de ce dossier est donc de présenter des configurations et leur étude pour en donner une construction à la règle et au compas.

II.2 A propos des exercices.

J'ai donc choisi, pour illustrer ce dossier, de vous présenter quatre exercices de niveau croissant :

- l'exercice n°1 propose la construction de tangentes à un cercle en fin de collège-seconde ;
- l'exercice n°2 propose la construction d'un pentagone régulier en Première S ;
- l'exercice n°3 propose la construction de cercles en Première S ;
- l'exercice n°4 propose la construction d'un carré en Terminale S.

Dans le cadre de ce dossier, on pourra également introduire et approfondir l'utilisation du raisonnement par analyse-synthèse dont je vous rappelle le principe :

- *Etape 1 : Analyse du problème*.

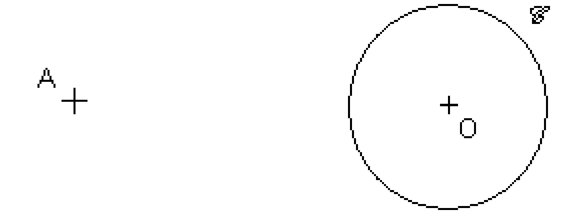
On suppose que le problème admet une solution et on réalise une figure en « trichant ». On exploite cette figure pour en déterminer des propriétés. Le raisonnement effectué au cours de cette étape est un raisonnement pas condition nécessaire.

- Etape 2 : Synthèse.

On détermine si les propriétés précédemment dégagée sont suffisantes pour que la figure réponde au problème posé et pour réaliser cette figure.

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.



But : Construire les tangents à C issues de A.

Méthode : raisonnement par analyse-synthèse

Outils :

- Définition de la tangente à un cercle ;
- *Théorème de l'angle droit :*

Etant donné un cercle de diamètre [AB], pour tout point M de ce cercle différent de A et de B, le triangle AMB est rectangle en M.

Réciproquement, si le triangle AMB est rectangle en M alors [AB] est un diamètre du cercle circonscrit à AMB.

III.2 Exercice n°2.

But : construire à la règle et au compas un pentagone régulier.

Méthode :

- Dans un pentagone régulier, on connaît la mesure des angles au centre « géométriques » et on peut donc les caractériser par leur cosinus : c'est l'objet de l'étude préliminaire.
- On propose à l'élève une construction et il doit montrer qu'elle aboutit à un pentagone régulier.

Outils :

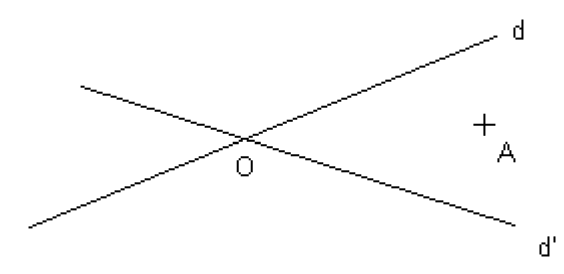
- Triangles semblables ;
- Les différentes expressions du produit scalaire ;
- Théorème de Pythagore ;

Commentaire :

(i) C'est un exercice très guidé qui peut faire l'objet d'un TP ou d'un travail en groupe.

(ii) Cet exercice a un objectif secondaire : il peut permettre aux élèves de bien assimiler les différentes expressions du produit scalaire.

III.3 Exercice n°3.

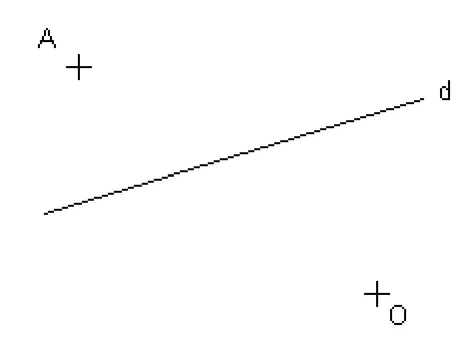


But : Construire un cercle passant par A et tangent à d et d'.

Méthode : raisonnement par analyse-synthèse.

Outils :
- Tangentes à un cercle ;
- Homothéties.

III.4 Exercice n°4.



But : construire un carré ABCD tel que B appartienne à d et (BC) et (CD) soient tangentes à un cercle de centre O.

Méthode : raisonnement par analyse-synthèse.

Outils :
- Similitudes ;
- Théorème de l'angle droit.

Commentaires :

L'exercice était présenté de manière ouverte et j'ai jugé bon d'ajouter des indications pour les élèves.

IV Enoncés et références des exercices.

IV.1 Exercice n°1 (p 207 Terracher 2nde 2000).

Etant donné un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et un point A extérieur à $\mathcal{C}$, construire à la règle (non graduée) et au compas les tangents au cercle $\mathcal{C}$ issues de A.

IV.2 Exercice n°2 (TD 4 p 369, Transmath 1ère S 2001)

Partie I : Préliminaires

ABC est un triangle isocèle en A, l'angle $\hat{A}$ a pour mesure $\frac{\pi}{5}$, BC = 1. La bissectrice de l'angle $A\hat{B}C$ coupe le segment [AC] en D.

1. Faire une figure puis montrer que les triangles BAC et BCD sont des triangles semblables et que $BC^2 = AB \times CD$.
2. On pose AB = x. Montrer que x(x-1) = 1 et en déduire x.
3. a) En projetant orthogonalement A en H sur (BC), montrer que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}$.

   b) En calculant $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ autrement, en déduire que $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

   c) A l'aide des formules de duplication, démontrer que $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Partie II : Construction à la règle et au compas.

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon R. [OA et [OA'] sont deux rayons perpendiculaires. Le point P est tel que $4\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OA}$ et Q est le milieu de [OA'].

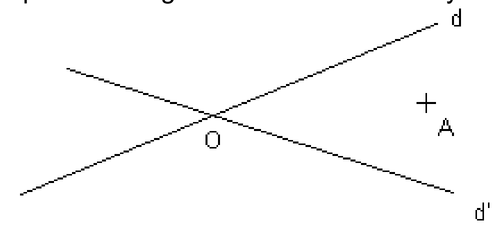
$\mathcal{C}$ ' est le cercle de centre P passant par Q. Il coupe (OA) en I et J (I $\in$ [OA]). Les tangentes en I et J à $\mathcal{C}$ ' recoupent $\mathcal{C}$ en quatre points tels que ABCDE soit un pentagone régulier, ce qu'il faut démontrer.

1. Pour le montrer, pourquoi suffit-il de montrer que $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{5}$ et $A\hat{O}C = \frac{4\pi}{5}$?
2. a) Calculer PQ en fonction de R et en déduire que $OI = \frac{R}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$.

   b) Montrer que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OA}$ et en déduire, en exprimant $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ d'une autre manière, $\cos A\hat{O}B$.
3. En exprimant $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$ de deux manières, calculer $\cos A\hat{O}C$ et conclure.

IV.3 Exercice n°3 (n°97 p 412, Transmath 1ère S 2001).

Deux droites d et d' sont sécantes en O, A est un point disposé comme l'indique la figure ci-dessous. Construire un cercle $\mathcal{C}$ passant par A et tangent à d et d'. Combien y-a-t-il de solutions au problèmes ?



IV.4 Exercice n°4 (TD5 p 111, Transmath TS Spé 2002).

On donne une droite d et deux points A et O extérieurs à d. Peut-on construire un carré ABCD de sommet A, dont le sommet B est sur d et tel que O soit le centre d'un cercle tangent à (BC) et (CD) ?

Indications :

1. Expliquer pourquoi la construction du point C permet celle de ABCD.
2. Prouver que C est sur le cercle de diamètre [AO].
3. En utilisant une similitude convenable, prouver que point C est aussi sur une droite fixe d_1.

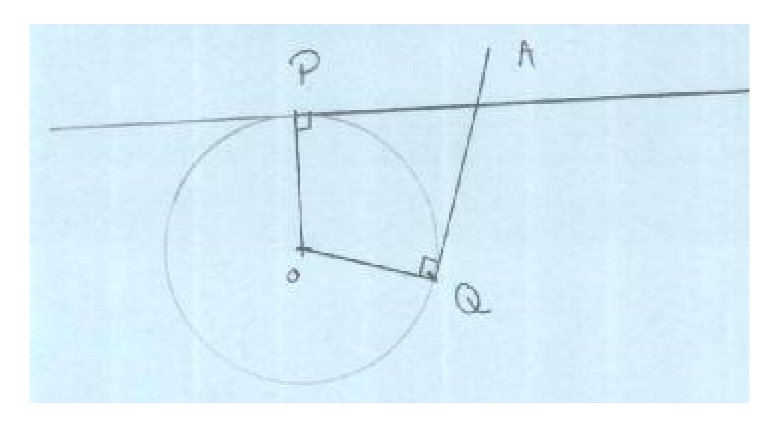
V Corrigés des exercices.

V.1 Exercice n°1.

Il s'agit de trouver P et Q tels que P et Q soient sur $\mathcal{C}$ et les angles $\widehat{APO}$ et $\widehat{AQO}$ soient droits.

Analyse :

Supposons le problème résolu. La figure suivante répond au problème.



OPA et OQA sont rectangles en P et Q respectivement. Donc P et Q appartiennent au cercle C' de diamètre [AO] d'après le théorème de l'angle droit.

De plus, P et Q appartiennent à $\mathcal{C}$.

Synthèse :

On peut construire à la règle et au compas le milieu I de [AO] : il suffit de tracer la médiatrice de [AO].

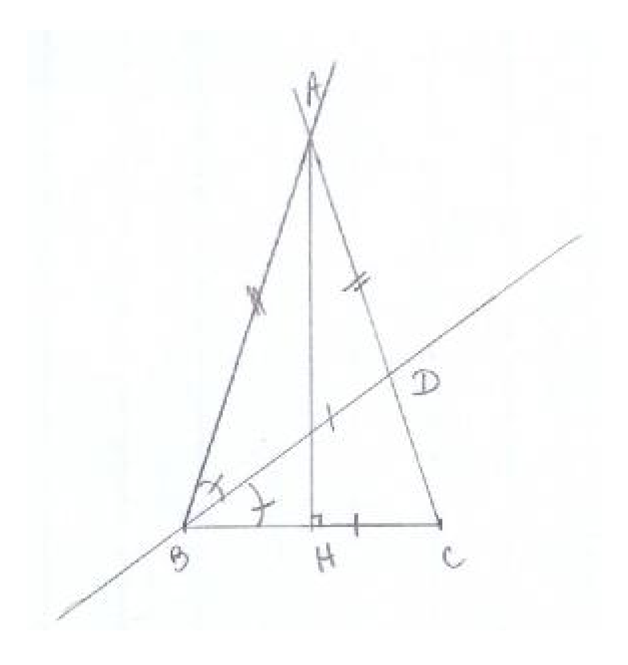
On trace au compas le cercle $\mathcal{C}$ ' de centre I et de rayon IA. $\mathcal{C}$ ' rencontre $\mathcal{C}$ en P et Q.

D'autre part, P $\in$ $\mathcal{C}$ ', Q $\in$ $\mathcal{C}$ ' donc OPA et OQA sont rectangles en P et Q respectivement d'après le théorème de l'angle droit.

Donc (OP) $\perp$ (PA) et (OQ) $\perp$ (QA) et (PA) et (QA) sont les tangentes à $\mathcal{C}$ issues de A.

V.2 Exercice n°2.

Partie I



1. $\widehat{CBD} = \frac{1}{2}\widehat{CBA} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5} = \widehat{BAC}$

$\widehat{DCB} = \widehat{ACB}$

Donc **BAC et CBD sont semblables**.

On souhaite montrer une égalité de produits de distances et on sait que la similitude de triangles nous donne des égalités de rapports de distances.

D'où $\frac{BD}{AC} = \frac{BC}{BA} = \frac{CD}{BC}$ et par suite, **BC² = AB × CD**.

2. AB = x.

On souhaite montrer que x(x-1) = 1. On remarque qu'en remplaçant dans l'égalité obtenue en 1, on a 1 = x × CD. Essayons donc de montrer que CD = x-1.

AB = AC = x car ABC est isocèle en A.

De plus, $\widehat{DBA} = \widehat{CBD} = \frac{\pi}{5}$ (car (DB) est la bissectrice issue de $\widehat{ABC}$) et ADB est donc isocèle en D.

D'où BD = AD.

$\widehat{CBD} = \frac{\pi}{5}$ et $\widehat{DCB} = \frac{2\pi}{5}$ donc $\widehat{CDB} = \frac{2\pi}{5}$ et BCD est isocèle en B ?

D'où BC = BD = AD = 1.

Or, CD = AC - AD car A, D et C sont alignés dans cet ordre.

Donc CD = AB – BC = x –1.

x(x-1) = 1.

On est ramené à résoudre une équation du second degré à une inconnue. Cette équation admet deux solution (discriminant positif égal à 5) :

$$x_i = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

5 > 4 donc $\sqrt{5} > \sqrt{4}$ puisque la fonction racine carrée est strictement croissante.

On en déduit que 1 - $\sqrt{5}$ < 0. Or, x est une distance donc **x =** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$**.**

3. a) *L'expression du produit scalaire à utiliser nous est donnée par l'énoncé.*

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}$ par projection du vecteur $\overrightarrow{BA}$ sur (BC)

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ = BH × BC = $\frac{1}{2}$ BC × BC car dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est également la médiatrice de la base principale.

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ **=** $\frac{1}{2}$ car BC = 1.

b) *On veut obtenir la valeur du cosinus d'un angle, on pense donc immédiatement à l'expression du produit scalaire utilisant le cosinus d'un angle.*

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ = BA × BC × cos $\widehat{ABC}$ = xcos $\frac{2\pi}{5}$.

D'où $\frac{1}{2}$ = x cos $\frac{2\pi}{5}$.

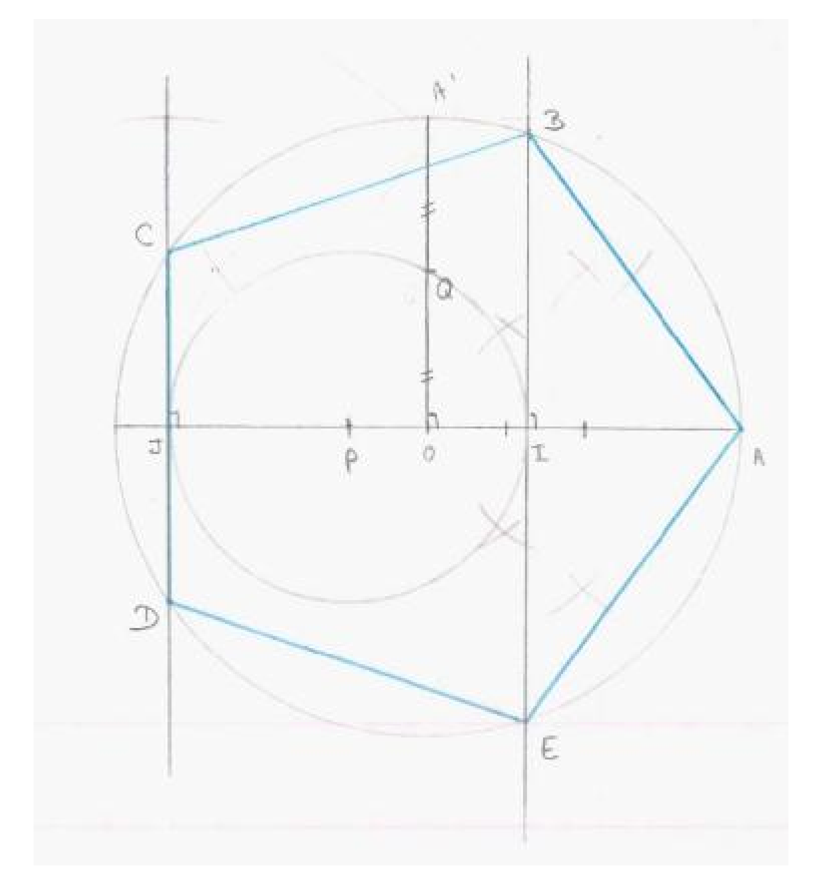
Donc cos $\frac{2\pi}{5}$ = $\frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = -\frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

Donc **cos** $\frac{2\pi}{5}$ **=** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$**.**

c) cos $\frac{4\pi}{5}$ = cos $\left(2\times\frac{2\pi}{5}\right) = \cos^2\frac{2\pi}{5} - \sin^2\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1 = 2\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4^2} - 1 = \frac{5-2\sqrt{5}+1-8}{8}$.

Donc cos $\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Partie II



1. [IJ] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ donc (IJ) est un axe de symétrie $\mathcal{C}$.

Par construction, B, C, D et E sont des points de $\mathcal{C}$ et (CD) et (BE) sont perpendiculaires à (IJ) donc B et E d'une part, C et D d'autre part, sont symétriques par rapport à (IJ).

De plus, une symétrie axiale conserve les angles géométriques, donc il suffit de trouver la valeur de $A\hat{O}B$ et $A\hat{O}C$.

2. a) Dans le triangle OPQ rectangle en O, on a, d'après le théorème de Pythagore :

PQ² = OQ² + OP² = $\left(\frac{1}{2}AO'\right)^2 + \left(\frac{1}{4}OA\right)^2$ par définition des points P et Q

PQ² = $\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{16}R^2 = \frac{5}{16}R^2$.

D'où **PQ =** $\frac{\sqrt{5}}{4}$ **R**.

I est un point du cercle $\mathcal{C}$ ' de centre P et de rayon PQ donc PI = PQ.

Or, OI = PI – OP car P, O et I sont alignés dans cet ordre.

Donc OI = PQ – OP = $\frac{\sqrt{5}}{4}R - \frac{1}{4}R$

OI = $\frac{R}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$.

b) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OA}$ par projection sur (OA).

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ = OA × OB × cos $A\hat{O}B$ = R²cos $A\hat{O}B$

Or, $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OA} = OI \times OA = R^2 \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

D'où **cos** $\mathbf{A\hat{O}B} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{5}$.

3. a) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OJ} = -OA \times OJ$

Or, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = R^2 \cos A\hat{O}C$.

$OJ = OP + PJ = OP + PQ = \frac{R}{4} + \frac{\sqrt{5}R}{4} = \frac{R}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$.

D'où **cos** $\mathbf{A\hat{O}C = -} \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $A\hat{O}C = \frac{4\pi}{5}$.

b) Il suffit de rassembler les morceaux…

V.3 Exercice n°3

Analyse :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre I, passant par A et tangent à d et d'. Alors la distance de I à d est égale à la distance de I à d' (cela correspond à la longueur d'un rayon du cercle) et par suite, I appartient à une bissectrice de d et d', celle contenue dans le demi-plan limité par les droites d et d' et contenant A.

Si h(O,k) est une homothétie de centre O, k > 0, elle transforme $\mathcal{C}$ en un cercle Γ qui est tangent à d et d' et transforme A en un point A'.

Synthèse :

Γ est un cercle quelconque tangent à d et d' et de centre O_1.Pour construire un tel cercle, il suffit de tracer, au compas et à la règle la bissectrice de l'angle formé par les droites d et d' et contenu dans le même demi-plan que A.

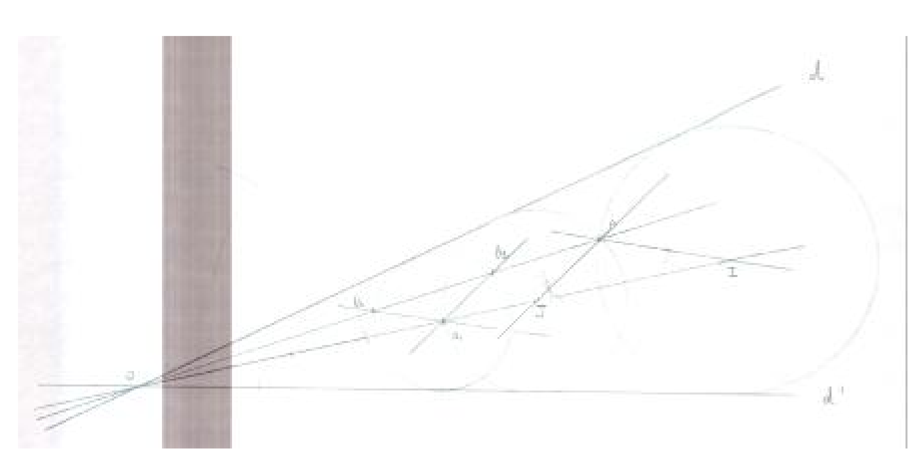
La droite (OA) rencontre ce cercle en B_1 et B_2. Notons h_1 et h_2 les homothéties de centre O telles que $h_1(B_1) = A$ et $h_2(B_2) = A$ (de telles homothéties existent puisque O, A, B_1 et B_2 sont alignés).

L'image de Γ par h_1 ou h_2 est donc un cercle passant par A et tangent à d et d'.

Pour obtenir ces cercles, il suffit de construire $I = h_1(O_1)$ et $J = h_2(O_1)$. Cette construction doit être faite à la règle et au compas. Nous allons construire les images de O_1 comme intersection de deux droites.

Tout d'abord, I et J sont des points de (OO_1) car le centre d'une homothétie, un point et son image par cette homothétie sont alignés.

D'autre part, l'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle. Donc l'image de $h_1((O_1B_1))$ est une droite passant par $h_1(B_1) = A$ et parallèle à (O_1B_1). On raisonne de même pour l'image de O_2.



V.4 Exercice n°4.

1. Lorsque le point C est connu, on connaît I, le milieu de [AC] et on peut le construire en construisant la médiatrice de [AC]. En particulier, [BD] est porté par cette médiatrice et I est le milieu de [BD], et BI = AI.

2. *Analyse :*

On suppose le problème résolu.

Soit Γ le cercle de centre O tangent à (BC) en T et à (CD) en U. Alors OTCU est un carré (car il a deux angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur). Donc l'angle $\widehat{ACO}$ est droit.

En effet, $\widehat{ACO} = \widehat{ACB} + \widehat{BCO} = 45°+45° = 90°$.

Donc, d'après le théorème de l'angle droit, C est sur le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AO].

3. *On nous propose d'utiliser les similitudes et de montrer que C est sur une droite fixe d_1. On sait que B est sur d et d est fixe donc, si C est l'image de B par une similitude qu'on peut déterminer, C appartiendra en particulier à l'image de d par cette similitude.*

Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$. Alors s(B) = C par construction et donc, comme B appartient à d, C appartient à d_1 = s(d) qui est fixe car d l'est.

Donc, si le problème admet une solution, il faut trouver C commun à $\mathcal{C}$ et d_1.

Synthèse :

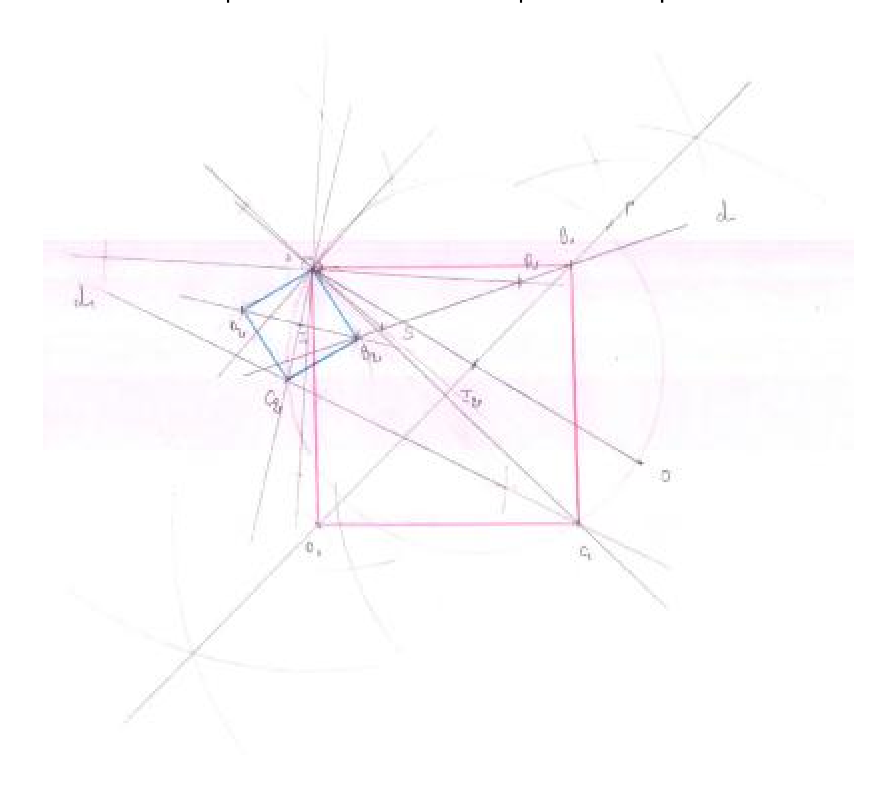
On construit à la règle et au compas s(d)=d_1. Pour cela, on construit l'image de deux points R et S de d par s. s étant la similitude de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$, il suffit de construire des carrés indirects ARR_1R_2 et ASS_1S_2 et l'image de R par s est R_1 et celle de S est S_1. Alors $d_1 = (R_1S_1)$.

Soit C un point de $d_1 \cap \mathcal{C}$. Soient B le point tel que s(B) = C et D le quatrième sommet du carré ABCD. Soient T et U les projetés orthogonaux de O sur (BC) et (CD) respectivement.

Alors $\widehat{ACO} = \frac{\pi}{2}$, par construction, $\widehat{ACT} = \frac{\pi}{4}$ d'où $\widehat{TCO} = \widehat{OCU} = \frac{\pi}{4}$.

O est sur la bissectrice intérieure de $\widehat{TCU}$ donc équidistant de (TC) et de (CU) ie O est le centre d'un cercle tangent à (BC) et (CD).

La construction montre qu'il existe deux carrés répondant au problème.



VI Compléments.

Voici quelques pistes pour l'entretien et quelques compléments sur les constructions à la règle et au compas.

1. Le triangle équilatéral, le carré, le pentagone régulier et l'hexagone régulier sont constructibles à la règle et au compas. Gauss a démontré que l'heptagone ne l'était pas.
2. Pour les dossiers de construction ou de recherche de lieux, il peut être intéressant de proposer des exercices mettant en œuvre le raisonnement par analyse-synthèse, qui consiste en fait à la recherche de conditions nécessaires puis suffisantes.
3. *Construction de la médiatrice d'un segment [AB] à la règle et au compas :*

La médiatrice d'un segment [AB] est l'ensemble des points équidistants de A et B. Si on connaît deux points de cette droite, on peut la tracer.

On trace donc, à l'aide du compas, quatre arcs de cercles : deux de centre A, deux de centre B, de même rayon, situés de part et d'autre du segment. Il faut toutefois choisir un rayon qui à l'œil nu est plus grand que la moitié de la longueur du segment.

On obtient ainsi deux points situés de part et d'autre du segment, équidistant de A et B : on obtient la droite cherchée.

4. *Construction à la règle et au compas d'une perpendiculaire à une droite d en A* :

On sait que la médiatrice d'un segment est perpendiculaire à ce segment en son milieu et on sait construire à la règle et au compas la médiatrice d'un segment.

Il suffit donc de construire deux points B et C de d équidistants de A et de construire la médiatrice de [BC].

5. *Construction à la règle et au compas de la parallèle à une droite d passant par A :*

On sait que les côtés opposés d'un parallélogramme ont même longueur et sont parallèles : c'est cette propriété que nous allons utiliser.

On choisit deux points B et C sur d et on construit un parallélogramme ABCD. Il suffit pour cela de tracer un arc de cercle de centre A et de rayon BC et un arc de cercle de centre C et de rayon AB : ces deux arcs sont sécants en D et par construction, ABCD est un parallélogramme et en particulier (AD) est parallèle à (BC)=d.